ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756

УДК 517.95

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

© **В. И. Сумин**

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: v_sumin@mail.ru

Аннотация. Дается обзор некоторых результатов, полученных в теории оптимизации распределенных систем методом вольтерровых функционально-операторных уравнений. Рассматриваются, в частности, следующие вопросы: условия сохранения глобальной разрешимости управляемых начально-краевых задач, условия оптимальности, сингулярные управляемые системы в смысле Ж.-Л. Лионса, особые оптимальные управления, вопросы обоснования численных методов оптимального управления и др.

Ключевые слова: вольтерровы функционально-операторные уравнения; управляемые начально-краевые задачи; условия сохранения глобальной разрешимости; задачи оптимизации; условия оптимальности; методы оптимизации

В $[1,2]$ была предложена весьма общая форма описания управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) с помощью *вольтерровых функционально-операторных уравнений* (ВФОУ) вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m\left(\Pi\right), \tag{1}$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ и $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ заданы; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ – управление; $A : L_p^m \to L_q^l$ – линейный *оператор, вольтерров на некоторой системе* T *подмножеств* Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A\left[z\right]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$ (это определение вольтерровости $[1,2]$ — непосредственное многомерное обобщение известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра; множества системы T естественно назвать вольтерровыми множествами

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727).

оператора A и ВФОУ (1)); $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФОУ (1) с достаточно богатыми системами T естественным образом (например, обращением главной части) приводятся самые разнообразные НКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.), в том числе при понимании решения НКЗ в обобщенном смысле (см., например, [3–13] и обзор [14]). Подчеркнем, что мы рассматриваем уравнение (1) прежде всего как удобную эквивалентную форму записи управляемой НКЗ; как правило, управление $v(.)$ в (1) соответствует распределенному управлению в НКЗ, а наличие в НКЗ граничных управлений, управляемой границы или управляемых старших коэффициентов уравнения означает, что в эквивалентном ВФОУ (1) оператор A является управляемым (см., например, [5, 6], обзоры [12, 14], статью М.С. Коржавиной и В.И. Сумина в этом номере журнала). Переход к описанию НКЗ с помощью ВФОУ (1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации. Он, возможно, позволяет достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме – с другой. Иногда бывает удобно в качестве эквивалента НКЗ вместо (1) или наряду с (1) использовать ВФОУ и другого вида (см., например, [15–17], обзор [14]). Коротко расскажем о некоторых результатах теории оптимизации, полученных с использованием ВФОУ.

При выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО), при обосновании численных методов решения задач оптимального управления и во многих других случаях возникает следующая ситуация. Некоторая управляемая НКЗ рассматривается на фиксированном множестве Π изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные, то есть определенные на всем Π, решения НКЗ из выбранного класса W функций на Π. Пусть $\mathcal{R}$ — множество тех управлений из класса допустимых, каждому из которых отвечает единственное в W решение рассматриваемой НКЗ; назовем $\mathcal{R}$ множеством глобальной разрешимости НКЗ. Важным является вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) не выводят допустимые управления из $\mathcal{R}$, то есть вопрос о достаточных условиях *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) данной НКЗ. Так, при выводе НУО недостаток информации об УСГР по возмущению управления часто вынуждает считать управляемую НКЗ сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [18] и переходить от классического случая «управление $\to$ состояние» к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар «управление, состояние», когда «управление» и «состояние» равноправны; при этом построения в сингулярном случае часто оказываются намного более сложными, чем аналогичные построения в несингулярном (см., например, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в главах 1, 2 [18]).

Для сосредоточенных управляемых систем теоремы о достаточных условиях УСГР хорошо известны: простейшие варианты дают теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от числового параметра, более общие случаи параметра из метрического и топологического пространств детально рассмотрены, например, в [19, 20], в [19] можно найти и подробную библиографию по этому вопросу, имеющему богатую историю. Гораздо меньше внимания уделялось вопросам УСГР распределенных управляемых систем. Условия УСГР управляемых НКЗ изучались, как правило, лишь при специальных возмущениях (вариациях) управлений, требующихся, например, для получения тех или иных НУО. Причем набор рассматривавшихся под таким углом зрения управляемых НКЗ относительно невелик. История вопроса кратко описана в [12].

В [6, 21, 22] представлена общая схема получения достаточных условий УСГР для распределенных управляемых систем, основанная на приведении НКЗ к эквивалентному ВФОУ вида (1) (первоначальный вариант схемы был описан для случая $p = q = k = \infty$ в [1], а затем в модернизированном виде – в [2–5]). На многочисленных примерах показано, что в терминах эквивалентных ВФОУ (1) условия УСГР управляемых НКЗ формулируются достаточно естественно и в то же время удобно для приложений; эти условия сопровождаются некоторыми утверждениями о непрерывной зависимости решений от управлений и оценками приращений решений. Схема позволяет получать конструктивные условия УСГР самых разнообразных НКЗ для различных нелинейных уравнений с частными производными при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений (см., например, [1, 3–13], обзоры [12, 14], статью М.С. Коржавиной и В.И. Сумина в данном номере журнала). При этом используется продолжение локальных решений (управляемой НКЗ или эквивалентного ВФОУ) вдоль цепочки вольтерровых множеств, которое в общем виде можно описать следующим образом: если фиксировано некоторое допустимое управление u_0 из множества глобальной разрешимости $\mathcal{R}$, то всякому допустимому управлению u, для которого величина $r(u, u_0)$ отклонения u от u_0 в некоторой полуметрике r, определяемой правой частью эквивалентного ВФОУ, достаточно мала, можно сопоставить конечную упорядоченную по вложению последовательность $H_1, H_2, ..., H_k$, $H_k = \Pi$, вольтерровых множеств ВФОУ так, что на H_1 управлению u отвечает локальное решение (НКЗ и эквивалентного ВФОУ) и это решение последовательными продолжениями с H_1 на H_2, ..., с H_{k-1} на H_k допускает продолжение до глобального решения, причем уклонение этого глобального решения от глобального решения, отвечающего управлению u_0, оценивается через $r(u, u_0)$. Заметим, что эта простая конструкция «цепочки вольтерровых множеств» оказалась весьма полезной в различных вопросах не только теории вольтерровых функционально-операторных уравнений, но и в теории вольтерровых операторов (см. ниже), а также в собственно теории оптимального управления распределенными системами и теории «функционально-операторных игр» (см. обзор [14]).

Распространение теории УСГР НКЗ, использующей указанную вольтеррову функционально-операторную переформулировку НКЗ в виде ВФОУ (1), с первоначально рассматривавшегося случая $p = q = k = \infty$ (см., например, [1–5] и обзоры [12, 14]) на общий случай $1 \leq p, q, k \leq \infty$ (что существенно расширило семейство охватываемых этой теорией НКЗ, см., например, [6–13] и обзоры [12, 14]) потребовало введения [20] и подробного изучения [6, 21, 22] нового понятия «равностепенная квазинильпотентность семейства операторов». При этом получила развитие идея работы [23], посвященной признаку квазинильпотентности вольтерровых функциональных операторов, опирающемуся на понятие цепочки вольтерровых множеств (точнее, на понятие так называемой δ-цепочки вольтерровых множеств [5]) оператора.

В [5, 24] доказательства упомянутых теорем УСГР ВФОУ (1), $p = q = k = \infty$, были распространены на нелинейные ВФОУ второго рода общего вида над L^m_∞ с варьируемой правой частью. В [15–17] схема [6, 20] вывода условий УСГР ВФОУ (1) в лебеговых пространствах была распространена на случай рассматриваемых над банаховым пространством вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида с варьируемой правой частью; при этом понятие «вольтерровость функционального оператора на системе множеств» в смысле [1, 2] заменяется более общим понятием «вольтерровость оператора на системе проекторов».

Теоремы УСГР нашли применение прежде всего при изучении вопросов варьирования и дифференцирования функционалов и операторов распределенных оптимизационных задач. Так, в [6, 25] для управляемых систем (1), $p = q = k = \infty$, было дано обоснование предложенного В.И. Плотниковым в [26] общего подхода к вычислению вариаций функционалов и операторов оптимизационной задачи, использующего линеаризацию задачи и соответствующие линейные интегральные представления приращений функционалов и операторов. Это позволило в [6] доказать, следуя общей схеме [26] вывода НУО в задачах с ограничениями, принцип максимума для связанной с управляемым ВФОУ (1) оптимизационной задачи достаточно общего вида со смешанными функциональными ограничениями и операторным ограничением типа включения (в качестве конкретного примера в [6] был получен принцип максимума для оптимизационной задачи с функциональными и фазовыми ограничениями, связанной с НКЗ для нелинейного параболического уравнения, при понимании решения НКЗ в обобщенном смысле). Заметим, что переход от управляемой НКЗ к ВФОУ (1), как правило, удобен при выводе НУО (например, принципа максимума) уже потому, что при этом дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы НКЗ, действующие в пространствах C_k или W^l_p, заменяются на (как правило, интегральные) операторы, действующие в более удобных для построения «сопряженной задачи» данного НУО лебеговых пространствах. Если эквивалентом НКЗ является ВФОУ (1), то сопряженная задача также имеет вид ВФОУ и не обязательно переписывается в дифференциальной (интегро-дифференциальной) форме подобно первоначальной управляемой НКЗ (см., примеры в [1, 6, 25, 27–29]).

В [3] с помощью теорем УСГР [2] для широкого класса оптимизационных задач с ограниченным множеством допустимых значений управления, связанных с НКЗ, допускающими описание ВФОУ (1) при $p = q = k = \infty$, было дано обоснование применению градиентных методов при произвольных порядках роста каратеодориевских «правых частей» НКЗ по «фазовым» и управляющим переменным (часто применяемое дифференцирование функционалов по управлению в пространствах типа L_2 требует, вообще говоря, линейных порядков роста (см., например, [30, гл. 8])).

Теоремы УСГР [6, 21] позволили решить в [6, 7] некоторые вопросы, связанные с проблемой сингулярности управляемых НКЗ в смысле Ж.-Л. Лионса [18]. В [18] предложено управляемую НКЗ называть сингулярной, в частности, тогда, когда некоторым требуемым для получения НУО вариациям управления либо не отвечает, либо неизвестно, отвечает ли, единственное глобальное решение данной НКЗ. В этом случае для вывода НУО в [18] было предложено переходить к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар «управление, состояние» и ограничение в виде управляемого уравнения «снимать» методом адаптированного штрафа. Как сказано выше, вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений. В [6, 7] показано, что ряд конкретных управляемых НКЗ, рассматриваемых в [18] как сингулярные, можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО придерживаться классической схемы. При этом бывает удобно «преодолевать сингулярность», переходя в описании управляемой НКЗ к ВФОУ и используя соответствующие теоремы УСГР или теоремы о неявных функциях. Так в [6, 7] удалось решить ряд поставленных в [18] задач получения «сингулярных НУО» (см. также [8]).

В [31, 27] был предложен аксиоматический подход в теории вариаций функционалов задач оптимизации, использующий представление управляемых систем (1), $p = q = k = \infty$, и аксиоматическое описание способов варьирования управлений; описание охватывает большинство традиционных для теории НУО способов варьирования (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, пакетами, сдвигом и др.). Это позволило единообразно рассмотреть широкий класс НУО первого и более высоких порядков (в случае так называемых особых управлений, на которых НУО первого порядка вырождается). В [31, 27], в частности, получил развитие способ [1] изучения особых управлений поточечного принципа максимума для систем (1), использующий при вычислении старших вариаций функционалов тензорные произведения лебеговых пространств. В [31, 27, 6] представлена обобщающая этот способ схема изучения особых управлений, использующая упомянутый аксиоматический подход. Показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно «сильное вырождение особых управлений», когда вместе с НУО первого порядка (например, поточечным принципом максимума, который можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управлений) вырождаются и НУО второго порядка. Описан способ компактной унификации построения НУО сильно вырожденных особых управлений, позволивший с единых позиций взглянуть на известные НУО особых управлений сосредоточенных и распределенных систем и получить ряд новых НУО подобных управлений для распределенных задач оптимизации (в частности, для задач, не рассматривавшихся в этом плане ранее; в теории оптимизации распределенных систем НУО особых управлений изучались в основном для поточечного принципа максимума в задачах оптимизации систем Гурса–Дарбу и близких к ним, при этом для систем Гурса–Дарбу рассматривались, как правило, терминальные задачи оптимизации; см., например, обзоры литературы в [31–32]). Подробное изложение схемы [31, 27, 6] применительно к особым управлениям поточечного принципа максимума для достаточно общей задачи оптимизации ВФОУ (1) дано в [32]. В [28–29] возможности варианта [32] схемы [31, 27, 6] демонстрируются на примере управляемой системы Гурса–Дарбу, являющейся, как известно, своеобразным «пробным камнем» теории оптимального управления распределенными системами.

Автор ограничился кратким обзором некоторых полученных в разное время им лично и в соавторстве результатов по рассматриваемой теме. Ряд интересных результатов по теме (свойства множеств глобальной разрешимости, обоснование численных методов распределенной оптимизации, функционально-операторные игры и др.) получил в последние годы А.В. Чернов (см., например, обзор [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин В.И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. … канд. физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1975. 158 с.

2. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Доклады Академии наук СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056-1059.

3. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3-21.

4. *Сумин В.И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2097-2109.

5. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.

6. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами: дис. … д-ра. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 1998. 346 с.

7. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145-155.

8. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1 (23). С. 198-204.

9. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 164-174.

10. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. IV // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2004. Вып. 1 (27). С. 185-193.

11. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 493-495.

12. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математика. 2003. Вып. 1. С. 91-107.

13. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 858-870.

14. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: труды Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН – УРФУ, 2015. С. 293-300.

15. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. Деп. в ВИНИТИ 25.04.00. № 1198-В00. 75 с.

16. *Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 2000. 177 с.

17. *Сумин В.И., Чернов А.В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39-49.

18. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.

19. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

20. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

21. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138-151.

22. *Sumin V.I.* Uniform quasinilpotency: definitions, conditions, examples of applications // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 453-466.

23. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402-1411.

24. *Сумин В.И.* О функциональных вольтерровых уравнениях // Известия высших учебных заведений. Математика. 1995. № 9. С. 67-77.

25. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сибирский математический журнал. 1981. Т. 22. № 6. С. 142-161.

26. *Плотников В.И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида // Доклады Академии наук СССР. 1971. Т. 199. № 2. С. 275-278.

27. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем // Оптимизация. Новосибирск, 1993. № 52 (69). С. 74-94.

28. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 483-491.

29. *Горохова И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гуса–Дарбу // Вестник ТЬамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. Вып. 122. С. 278-284.

30. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 433 с.

31. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // Доклады Академии наук СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 295-299.

32. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 20. Вып. 3. С. 70-80.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сумин Владимир Иосифович, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: v_sumin@mail.ru

Для цитирования: *Сумин В.И.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения и распределенные задачи оптимизации // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 745–756. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756

VOLTERRA FUNCTIONAL-OPERATOR EQUATIONS AND DISTRIBUTED OPTIMIZATION PROBLEMS

V. I. Sumin

Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: v_sumin@mail.ru

Abstract. A survey of the results obtained in the theory of optimization of distributed systems by the method of Volterra functional-operator equations is given. Topics are considered: the conditions for preserving the global solvability of controllable initial-boundary value problems, optimality conditions, singular controlled systems in the sense of J.L. Lions, singular optimal controls, numerical optimization methods substantiation and others.

Keywords: Volterra functional-operator equations; controlled initial-boundary value problems; conditions for preserving global solvability; optimization problems; optimality conditions; optimization methods

REFERENCES

1. Sumin V.I. *Optimizatsiya upravlyayemykh obobshchennykh vol'terrovykh sistem: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Optimization of Generalized Controlled Volterra Systems. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Gorky, State University of Gorky Publ., 1975, 158 p. (In Russian).

2. Sumin V.I. Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1989, vol. 39, no. 2, pp. 374-378.

3. Sumin V.I. The Features of Gradient Methods for Distributed Optimal-Control Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, pp. 1-15.

4. Sumin V.I. Sufficient conditions for stable existence of solutions to global problems in control theory. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 12, pp. 1579-1590.

5. Sumin V.I. *Funktsional'nyye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 1992, 110 p. (In Russian).

6. Sumin V.I. *Funktsional'nyye vol'terrovy uravneniya v matematicheskoy teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [Functional Volterra Equations in the Mathematical Theory of Optimal Control of Distributed Systems. Dr. phys.-math. sci. diss.]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 1998, 346 p. (In Russian).

The work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of the project part of state task in the sphere of scientific activities in 2014-2016 (project № 1727).

7. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. I [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1999, no. 2 (21), pp. 145-155. (In Russian).

8. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. II [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. II]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2001, no. 1 (23), pp. 198-204. (In Russian).

9. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. III [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. III]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2002, no. 1 (25), pp. 164-174. (In Russian).

10. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. IV [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. IV]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2004, no. 1 (27), pp. 185-193. (In Russian).

11. Sumin V.I. Usloviya ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyayemykh krayevykh zadach dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy [Conditions of the existence of global solutions of controlled boundary problems for non-linear parabolic equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 493-495. (In Russian).

12. Sumin V.I. Problema ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyayemykh krayevykh zadach i vol'terrovy funktsional'nyye uravneniya [The problem of sustainability of global solutions existence of controlled boundary problems and Volterra functional equations]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematika – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematics*, 2003, no. 1, pp. 91-107. (In Russian).

13. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Nonlinear Goursat-Darboux Control Problem: Conditions for the Preservation of Global Solvability. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 863-876.

14. Sumin V.I., Chernov A.V. Vol'terrovy funktsional'no-operatornyye uravneniya v teorii optimizatsii raspredelennykh sistem [Volterra functional-operator equations in the distributed systems optimization theory]. *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii «Dinamika sistem i protsessy upravleniya», posvyashchennoy 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika N.N. Krasovskogo* [Proceedings of the International Conference "Systems Dinamics and Control Processes" dedicated to the 90th Anniversary of Academican N.N. Krasovskiy]. Ekaterinburg, IMM UB RAS Publ., 2015, pp. 293-300. (In Russian).

15. Sumin V.I., Chernov A.V. *Vol'terrovy operatornyye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh: ustoychivost' sushchestvovaniya global'nykh resheniy* [Volterra Operator Equations in Banach Spaces: Sustainability of Global Solutions Existence]. 75 p. (In Russian).

16. Chernov A.V. *Vol'terrovy operatornyye uravneniya i ikh primeneniye v teorii optimizatsii giperbolicheskikh sistem: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Volterra Operator Equations and Their Application to the Hyperbolic Systems Optimization Theory. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2000, 177 p. (In Russian).

17. Sumin V.I., Chernov A.V. O dostatochnykh usloviyakh ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy vol'terrovykh operatornykh uravneniy [About sufficient conditions for the existence stability of Volterra operator equations global solutions]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2003, no. 1 (26), pp. 39-49. (In Russian).

18. Lions J.L. *Controle des systemes distribues singuliers*. Paris, Gauthier-Villars, 1983. (In French).

19. Filippov A.F. *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with a Disconnected Right Part]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p. (In Russian).

20. Alekseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noye upravleniye* [Optimal Control]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p. (In Russian).

21. Sumin V.I. Upravlyayemyye funktsional'nyye vol'terrovy uravneniya v lebegovykh prostranstvakh [Controlled functional Volterra equations in Lebesgue space]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1998, no. 2 (19), pp. 138-151. (In Russian).

22. Sumin V.I. Uniform quasinilpotency: definitions, conditions, examples of applications. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 453-466.

23. Sumin V.I., Chernov A.V. Operators in Spaces of Measurable Functions: the Volterra Property and Quasinilpotency. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403-1411.

24. Sumin V.I. On functional Volterra Equations. *Russian Mathematics*, 1995, no. 9, pp. 65-75.

25. Plotnikov V.I., Sumin V.I. Optimization of distributed systems in Lebesgue space. *Siberian Mathematical Journal*, 1981, vol. 22, no. 6, pp. 913-929.

26. Plotnikov V.I. Necessary conditions of optimality for control systems of general type. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1971, vol. 199, no. 2, pp. 1069-1073.

27. Sumin V.I. Sil'noye vyrozhdeniye osobykh upravleniy v zadachakh optimizatsii raspredelennykh sistem [Strong degeneration of singular controls in problems of optimization of distributed systems]. *Optimizatsiya – Optimization*, 1993, no. 52 (69), pp. 74-94. (In Russian).

28. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh printsipa maksimuma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa-Darbu [On singular controls of a maximum principle for the problem of the Goursat-Darboux system optimization]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 483-491. (In Russian).

29. Gorokhova I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimyma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [About singular controls of pointwise maximum principle for optimization problem connected with Goursat–Darboux system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 278–284. (In Russian).

30. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, 2011, 433 p. (In Russian).

31. Sumin V.I. Strong degeneration of singular controls in distributed optimization problems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1991, vol. 320, no. 2, pp. 295-299.

32. Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimuma v raspredelennykh zadachakh optimizatsii [On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 70-80. (In Russian).

Received 19 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

For citation: Sumin V.I. Volterrovy funktsional'no-operatornye uravneniya i raspredelyennye zadachi optimizatsii [Volterra functional-operator equations and distributed optimization problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 745–756. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756 (In Russian, Abstr. in Engl.).